

Geometrické konstrukce

6. ročník

jméno:

třída:

Řešení : sedovamatika.cz

„Některé z příkladů použité v tomto PDF jsou převzaty z materiálů Cermatu (www.ceremat.cz), které slouží jako příklady pro přijímací zkoušky a testy.“

aktualizováno: 20. 7. 2026

9. Osová souměrnost

Shodné útvary jsou takové, které mají stejný tvar i velikost.

Shodné útvary jsou takové, které se při přiložení navzájem překrývají.

Kdy jsou obrazce shodné?

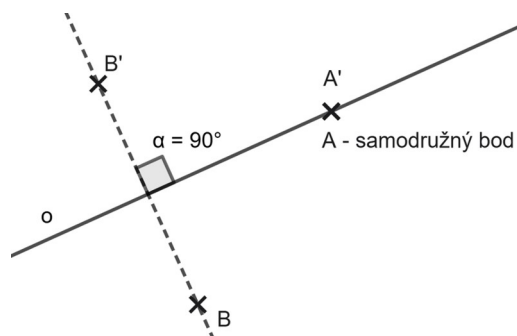
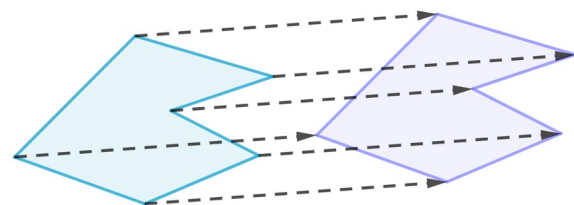
úsečky: když mají stejnou délku

úhly: když mají stejnou velikost

přímky a polopřímky: jsou shodné vždy

kružnice: když mají stejný poloměr

trojúhelníky: když mají stejně dlouhé strany



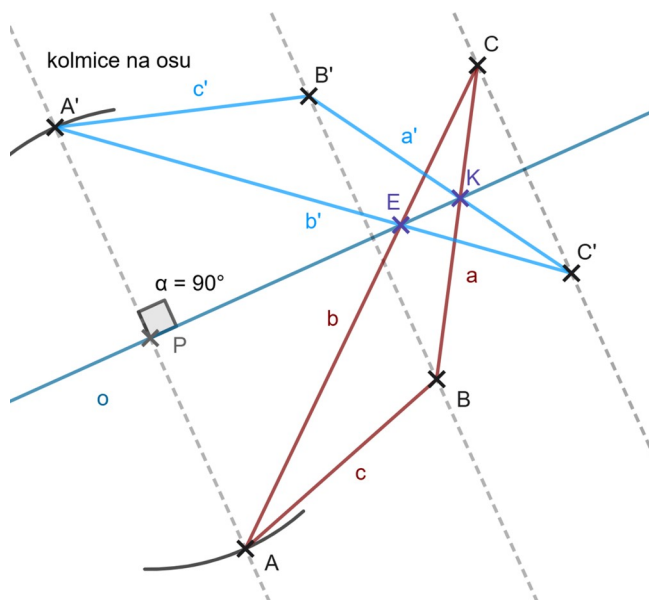
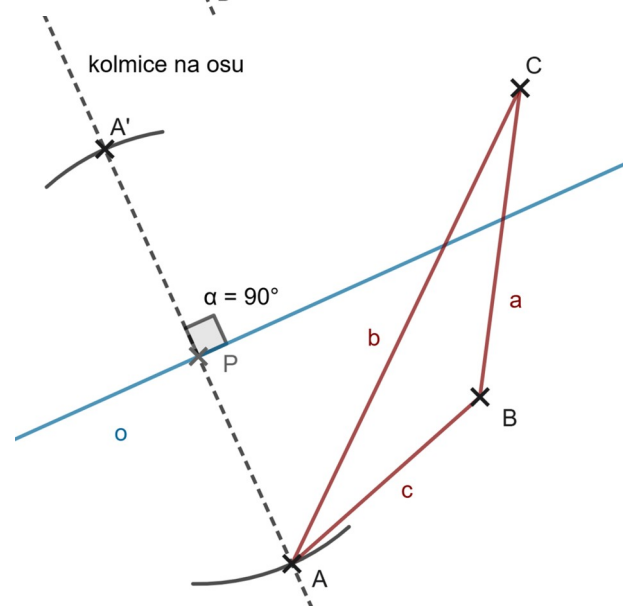
osová souměrnost

- zobrazení určené přímkou, ve kterém každému bodu (vzoru) je přiřazen jeho obraz, který je se vzorem shodný. Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**. (vytvoříme obraz jako kdybychom překlátili papír podle osy a vzor obtiskli)

Body B a B' leží na kolmici k ose a mají od osy stejnou vzdálenost.

Bod, který leží na ose, se zobrazí sám na sebe.

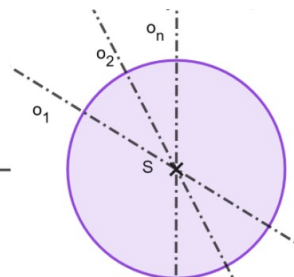
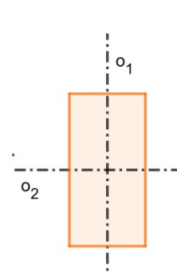
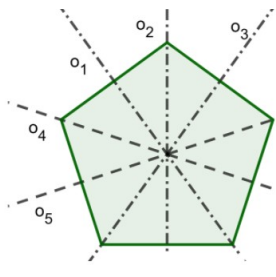
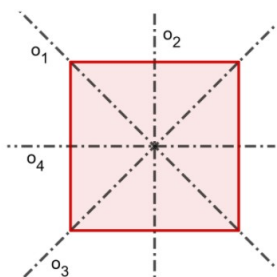
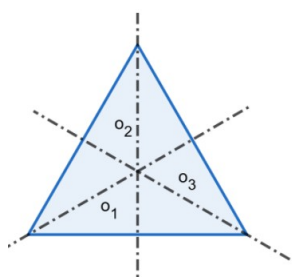
→ $A = A'$ takový bod se nazývá **samodružný**.



Vybereme si jeden z vrcholů (A) a vedeme z něj kolmici na osu. Do kružítka naměříme vzdálenost PA (vzdálenost bodu A od osy) a přeneseme tuto vzdálenost na druhou stranu osy, kde vznikne obraz bodu A. Obraz označíme A'.

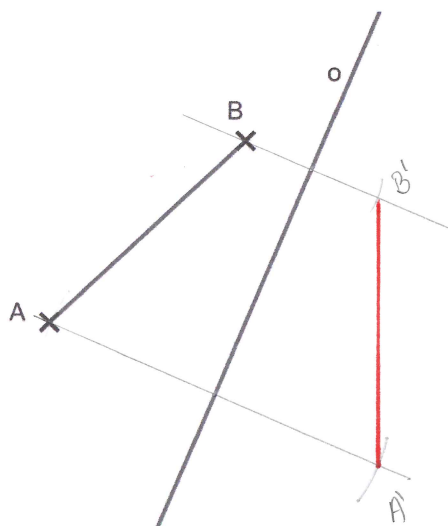
Stejným způsobem sestrojíme ostatní body. Pokud jsou body A a B spojeny úsečkou c, potom i jejich obrazy A' a B' budou spojeny úsečkou c'. Body E a K jsou samodružné. Pokud samodružným bodem E prochází b, potom tímto bodem musí procházet i b'.

Útvar osově souměrný je takový útvar, který se podle osy o zobrazí sám na sebe. Představme si, že bychom ohnuli papír podle osy a proti světlu by se nám útvary překrývaly. Některé útvary nemají žádnou osu (obecný trojúhelník) a například kruh má nekonečně mnoho os souměrnosti.

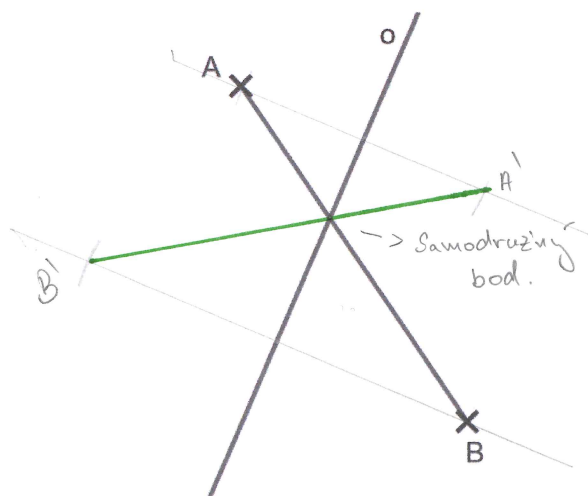


Osová souměrnost 1

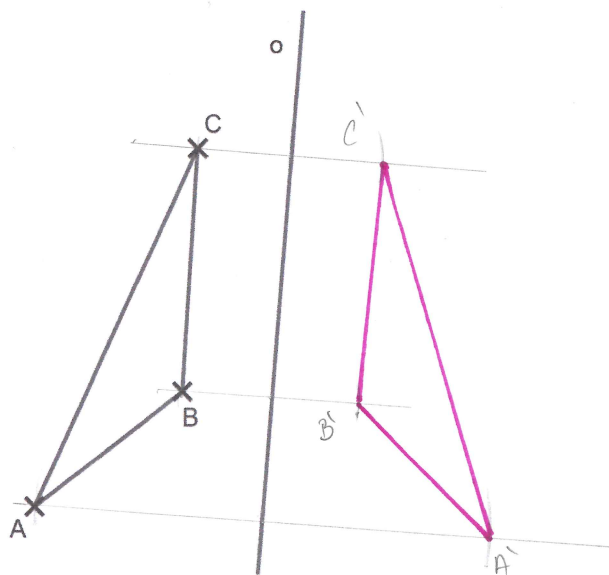
1) Narýsuj obraz úsečky AB v osově souměrnosti podle osy o .



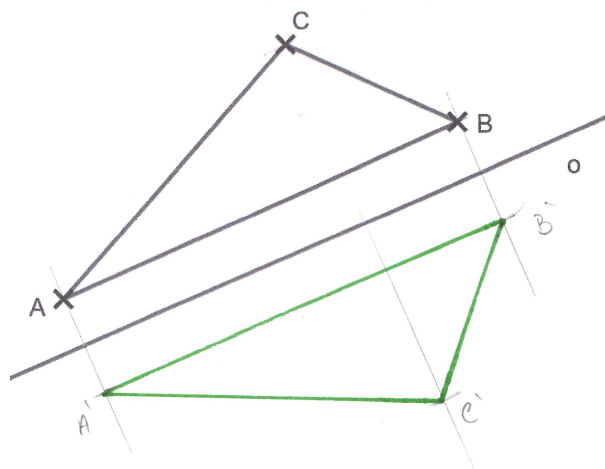
2) Narýsuj obraz úsečky AB v osově souměrnosti podle osy o .



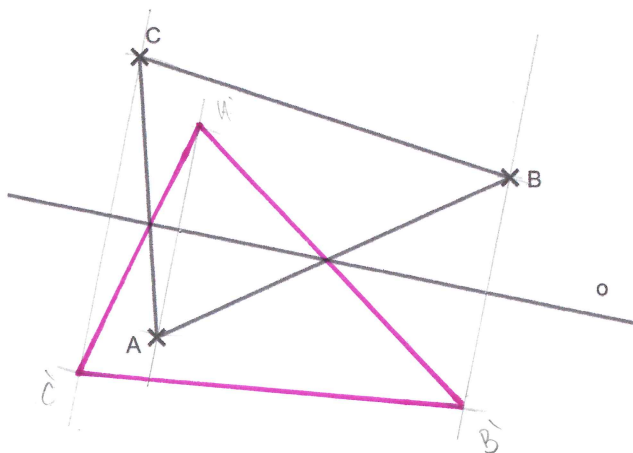
3) Narýsuj obraz trojúhelníku ABC v osově souměrnosti podle osy o .



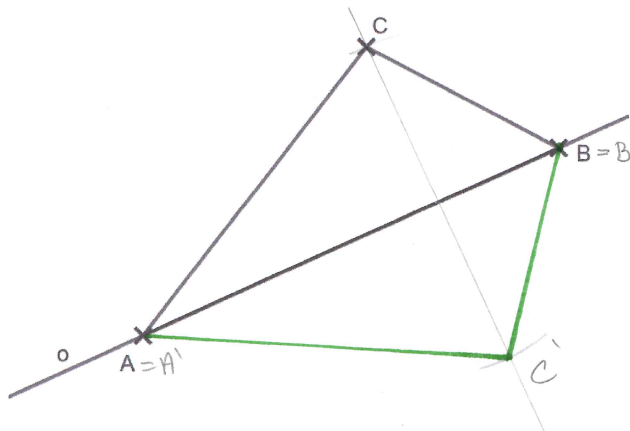
4) Narýsuj obraz trojúhelníku ABC v osově souměrnosti podle osy o .



5) Narýsuj obraz trojúhelníku ABC v osově souměrnosti podle osy o .

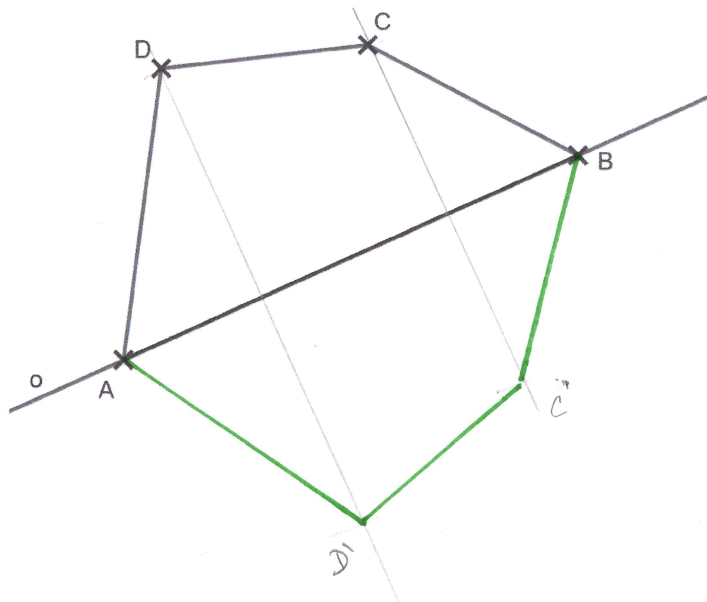


6) Narýsuj obraz ~~obraz~~ trojúhelníku ABC v osově souměrnosti podle osy o .

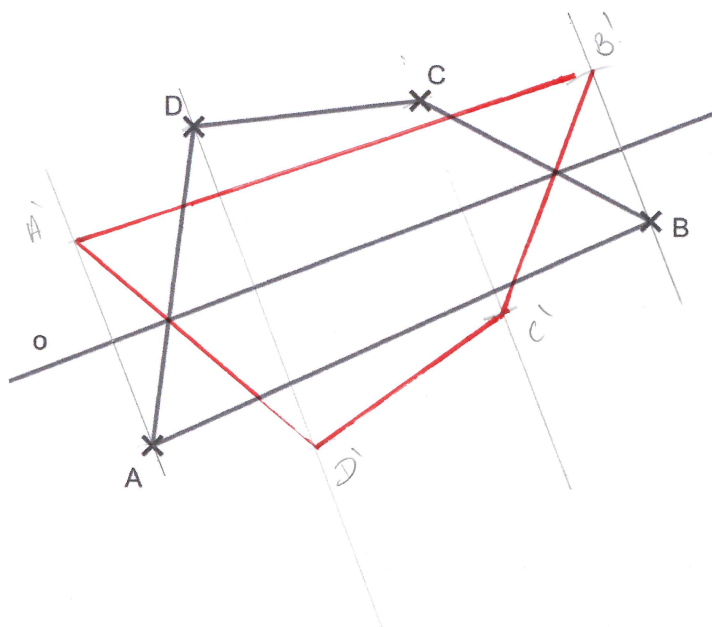


Osová souměrnost 2

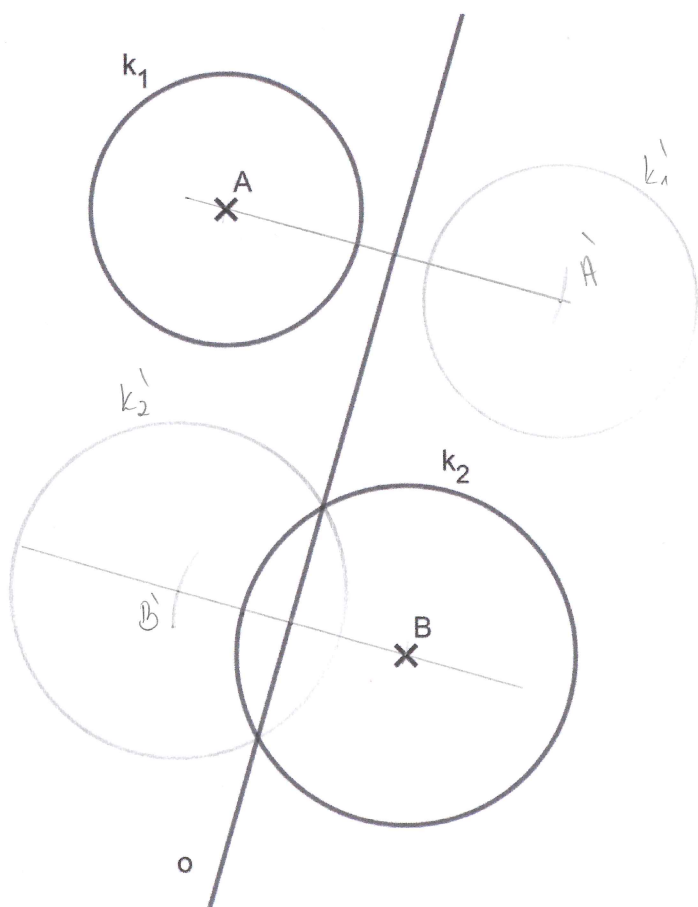
1) Narýsuj obraz čtyřúhelníku ABCD v osově souměrnosti podle osy o .



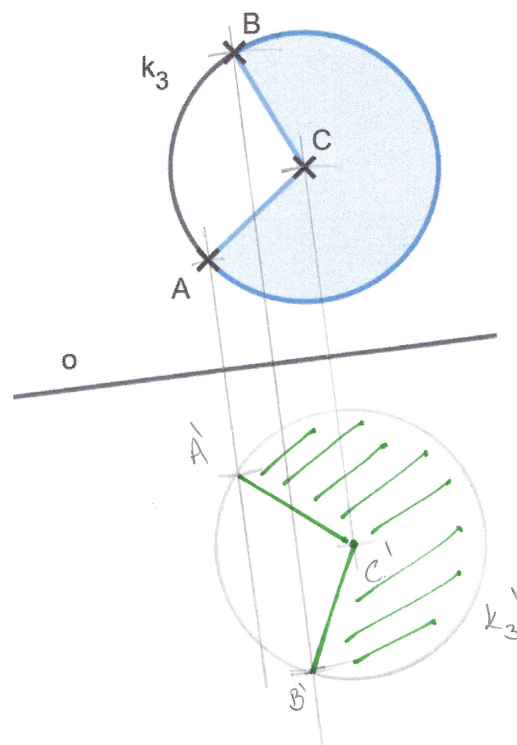
2) Narýsuj obraz čtyřúhelníku ABCD v osově souměrnosti podle osy o .



3) Narýsuj obraz kružnic k_1 a k_2 v osově souměrnosti podle osy o .

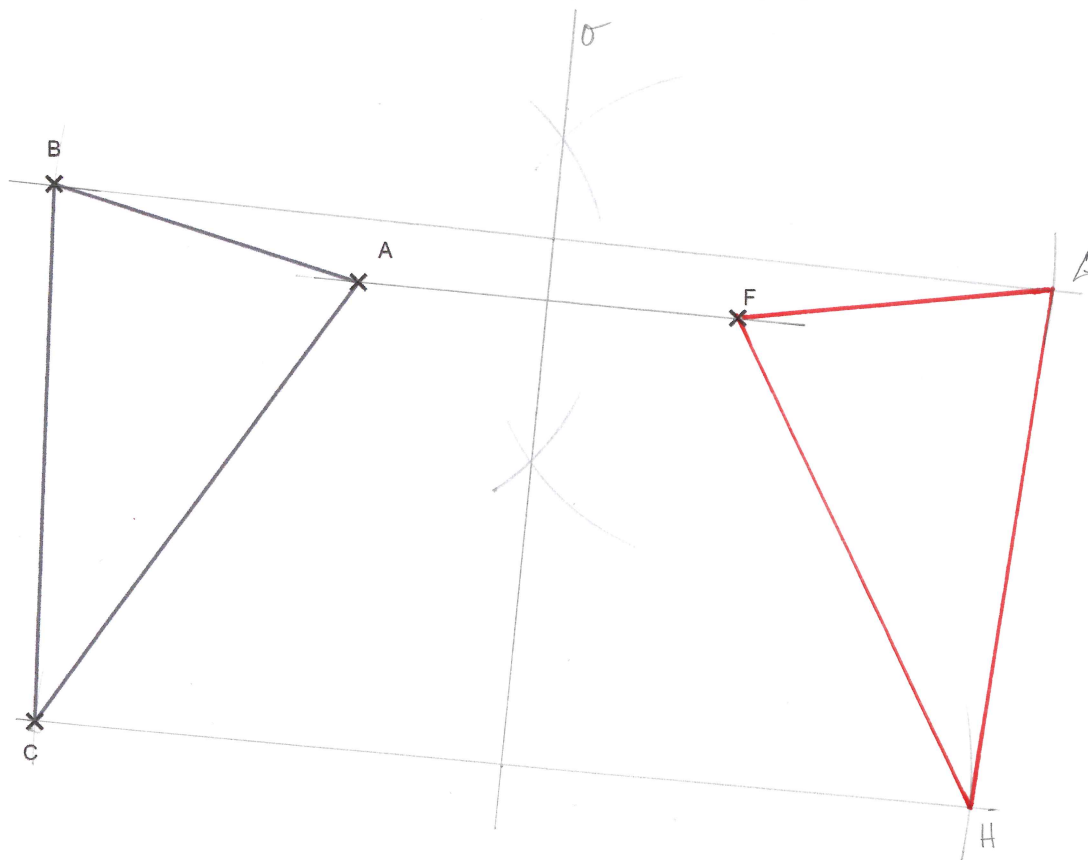


4) Narýsuj obraz kružnic k_3 a modré kruhové výseče v osově souměrnosti podle osy o .

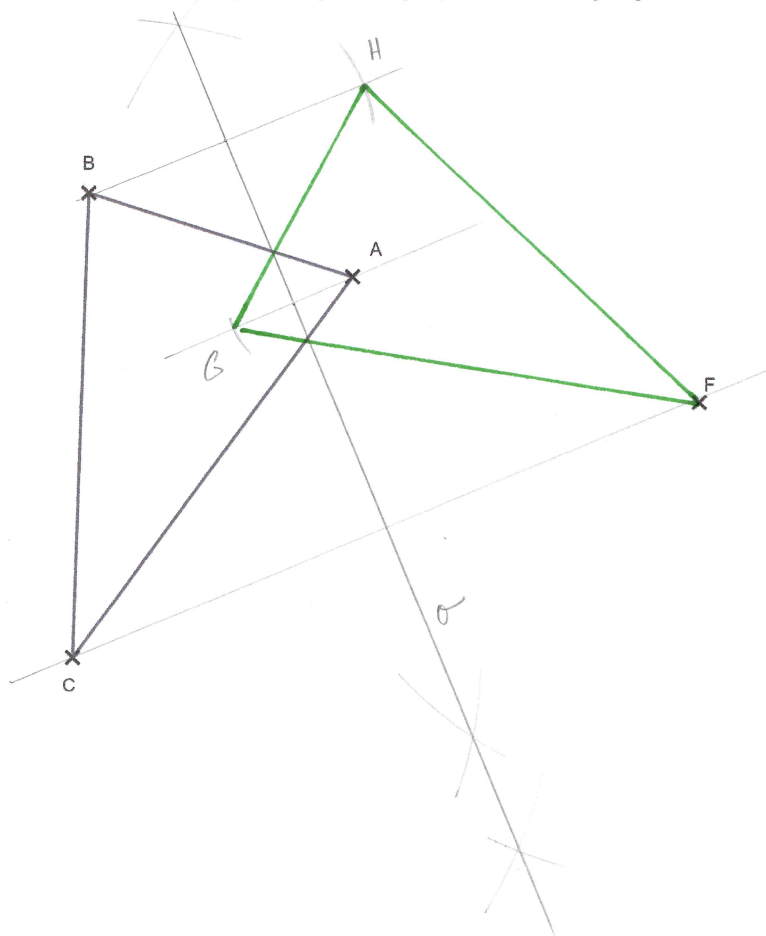


Osová souměrnost 3

1) Bod F je obraz bodu A v osově souměrnosti podle osy o . Narýsuj osu o a sestroj trojúhelník FGH osově souměrný s trojúhelníkem ABC.

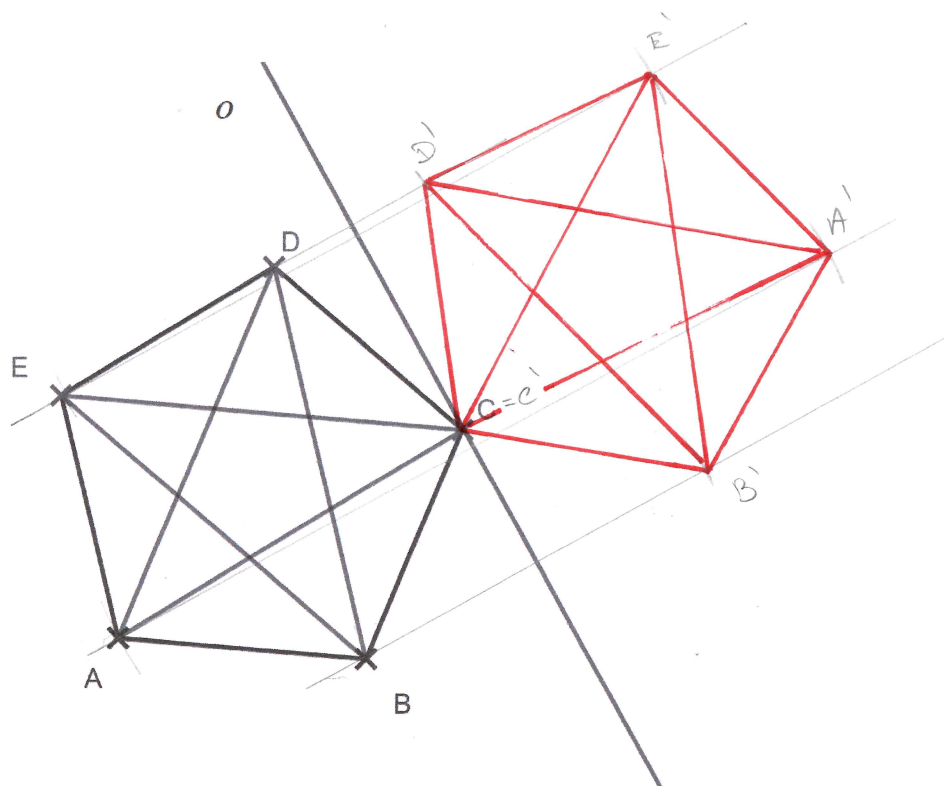


2) Bod F je obraz bodu C v osově souměrnosti podle osy o . Narýsuj osu o a sestroj trojúhelník FGH osově souměrný s trojúhelníkem ABC.

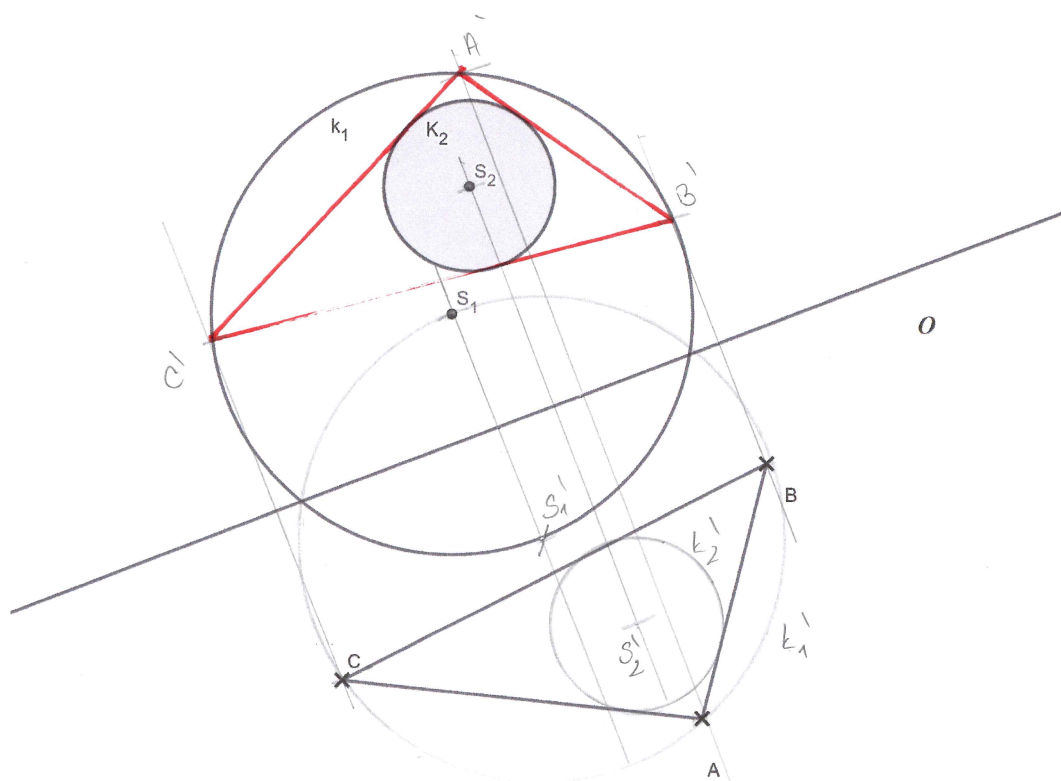


Osová souměrnost 4

1) Sestroj obrazec v osově souměrnosti podle osy o



2) Sestroj obrazec v osově souměrnosti podle osy o



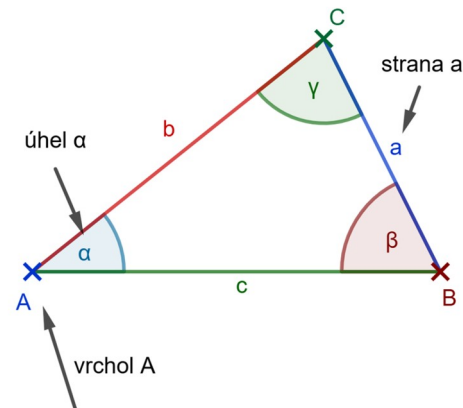
10. Trojúhelník

Značíme: $\triangle ABC$

Vrcholy: A, B, C

strany: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ (naproti vrcholu)

vnitřní úhly: α , β , γ



Trojúhelníková nerovnost:

součet dvou libovolných stran trojúhelníku je vždy větší než délka zbývající strany.

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Příklad: Početně ověřte, zda lze sestavit trojúhelník ABC $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $c = 5$ cm.

Ověříme přes trojúhelníkovou nerovnost

$$4 + 5 > 7 \quad 4 + 7 > 5 \quad 7 + 5 > 4$$

O: Trojúhelník lze sestavit.

Příklad: Početně ověřte, zda je možné sestavit trojúhelník KLM $k = 8$ cm, $l = 15$ cm, $m = 6$ cm

Stačí ověřit největší stranu:

$$8 + 6 < 15$$

součet dvou stran není větší než třetí

O: Trojúhelník nelze sestavit

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

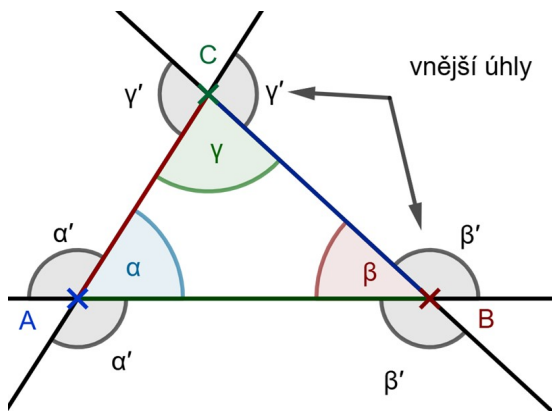
Příklad: Dopočítejte chybějící úhel γ v trojúhelníku ABC, když velikost zbývajících úhlů je $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 69^\circ$.

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 23^\circ - 69^\circ = 88^\circ$$

Příklad: Dopočítejte chybějící úhel v trojúhelníku ABC, když velikost zbývajících úhlů je $\alpha = 41^\circ 15'$, $\beta = 112^\circ 22'$.

$$\gamma = 180^\circ - 41^\circ 15' - 112^\circ 22' = 26^\circ 23'$$

Vnější úhly



$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

$$\alpha = 180^\circ - \alpha'$$

→ Vnější úhel má stejnou velikost jako součet dvou zbývajících vnitřních úhlů v trojúhelníku.

$$\alpha' = 180^\circ - \beta - \gamma$$

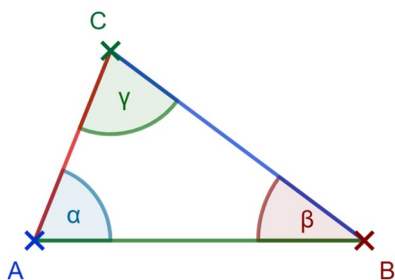
$$\beta' = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$\gamma' = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Trojúhelníky podle velikosti úhlů:

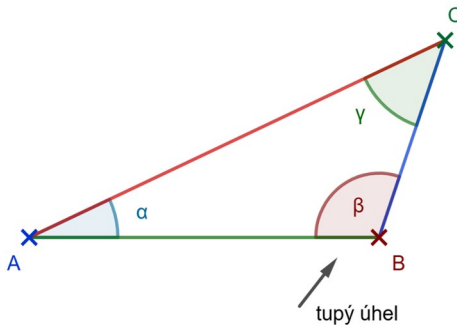
Ostroúhlý trojúhelník

všechny úhly jsou menší než 90°



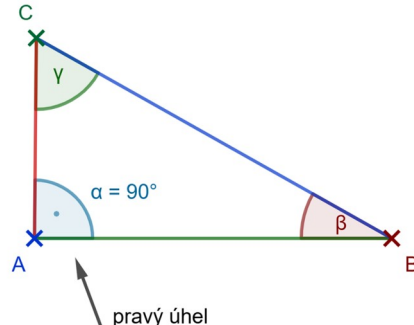
Tupoúhlý trojúhelník

Jeden úhel je větší než 90° a menší než 180°



Pravouhlý trojúhelník

Jeden úhel má velikost 90°



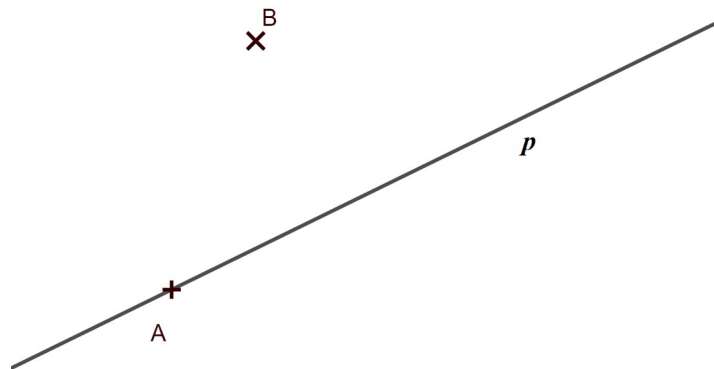
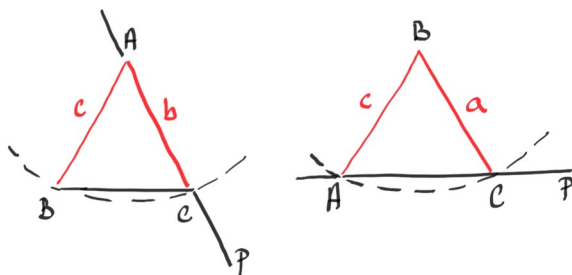
Řešení konstrukční úlohy

- Rozbor:** Načtneme hledaný útvar (**náčrtek**) a vyznačíme vlastnosti, které lze využít při konstrukci.
- Diskuze:** Zkoumáme, zda lze útvar sestavit (např. trojúhelníková nerovnost), kolik má řešení a za jakých podmínek vznikne.
- Postup konstrukce:** Podle nalezených vztahů sestavíme posloupnost jednoduchých konstrukcí (**popis konstrukce**) a konstrukci provedeme.
- Zkouška:** Zkontrolujeme, zda získaný útvar má vlastnosti požadované v zadání úlohy.

Příklad: Sestroj do obrázku rovnoramenný trojúhelník ABC, tak aby bod C ležel na přímce p a AB bylo rameno trojúhelníku.

1. Náčrtek

Nemusí odpovídat přesně vzhledem, ale musí v něm být obsaženo zadání.



2. Diskuze (rozbor zadání) – uvažování zda lze trojúhelník sestavit a kolik má úloha řešení.

V tomto příkladě není pevně zadáno, která strana je základna rovnoramenného trojúhelníku → dvě řešení.

3. Konstrukce

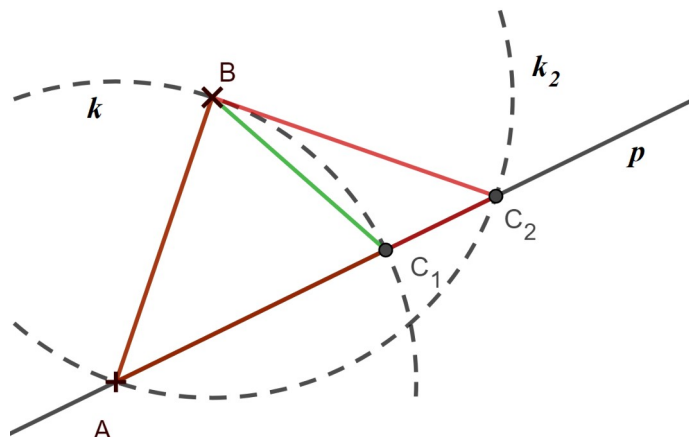
+ popis konstrukce (buď **značkami** nebo **slovy**)

První řešení:

- 1) $k(A, |AB|)$ - sestrojíme kružnici k se středem v bodě A a poloměrem o velikosti úsečky AB.
- 2) $C_1 = k \cap p$ - sestrojíme bod C_1 , který je průsečíkem kružnice k a přímky p .
- 3) $\triangle ABC_1$ - sestrojíme trojúhelník ABC_1

Druhé řešení

- 1) $k_2(B, |AB|)$ - sestrojíme kružnici k_2 se středem v bodě B a poloměrem o velikosti úsečky AB.
- 2) $C_2 = k_2 \cap p$ - sestrojíme bod C_2 , který je průsečíkem kružnice k_2 a přímky p
- 3) $\triangle ABC_2$ - sestrojíme trojúhelník ABC_2



4. Zkouška – zkontrolujeme, zda máme sestaven opravdu rovnoramenný trojúhelník o požadovaných vlastnostech.

Kdy lze trojúhelník sestavit? – **Věty o shodnosti trojúhelníků**

1. věta **SSS**

→ pomocí tří stran
(postup známe)

2. věta **SUS**

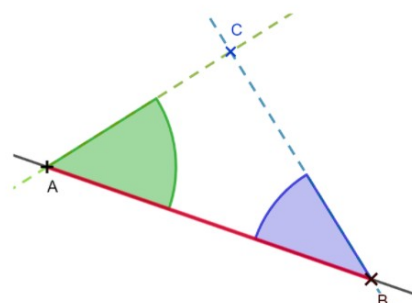
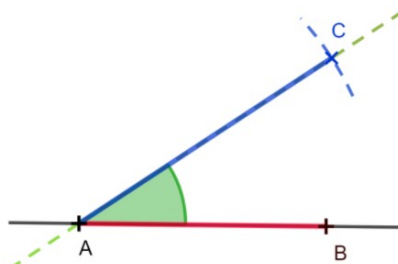
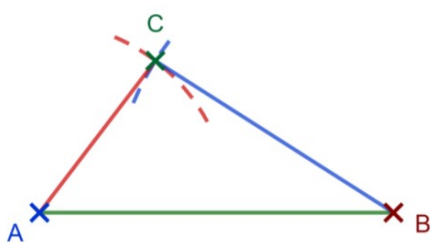
→ dvě strany a úhel, který svírají

1. krok: strana
2. krok: úhel
3. krok: strana

3. věta **USU**

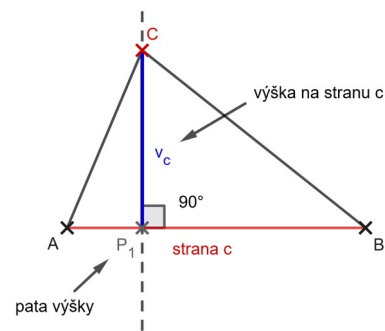
→ pomocí dvou úhlů a strany

1. krok: strana
2. krok: úhel
3. krok: úhel



Výška v trojúhelníku:

Sestrojíme kolmici z vrcholu na protější stranu. Potom je výška úsečka ležící na této kolmici. Jejimi krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata výšky (průsečík kolmice se stranou). Výška je tedy také kolmá na stranu. Značíme: v_a , v_b , v_c (značíme tak i délku).

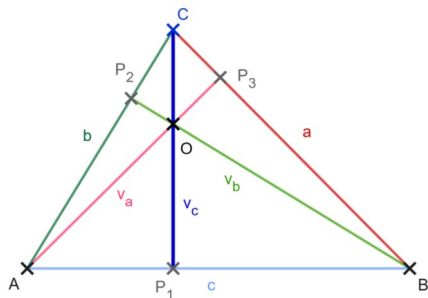


O - Ortocentrum je průsečík přímek, na kterých leží výšky trojúhelníku.

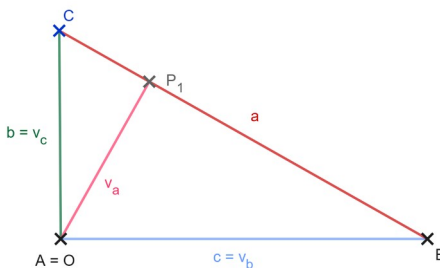
- Nejedná se o průsečík výšek, protože v tupohléhém trojúhelníku se samotné výšky neprotínají, protínají se až přímky, na nichž leží.

U pravoúhlého trojúhelníku dvě výšky splývají s kratšími stranami trojúhelníku (**odvěsnami**).

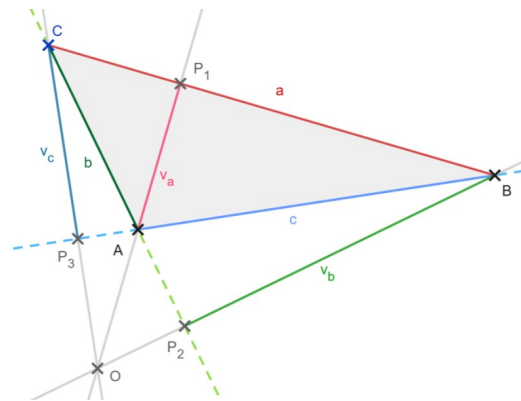
Výšky v **ostroúhlém trojúhelníku**



Výšky v **pravoúhlém trojúhelníku**



Výšky v **tupoúhlém trojúhelníku**



Výpočty v trojúhelníku

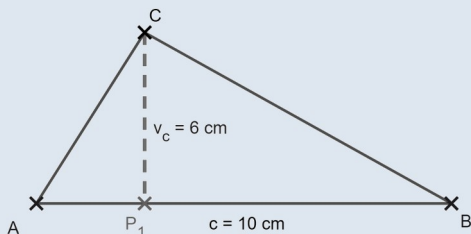
Obvod trojúhelníku: součet všech tří stran

$$o = a + b + c$$

Obsah trojúhelníku:

$$S = (a \cdot v_a) : 2 = (b \cdot v_b) : 2 = (c \cdot v_c) : 2$$

Příklad: Vypočítej obsah trojúhelníku $\triangle ABC$ na obrázku.



$$S = (c \cdot v_c) : 2 = (10 \cdot 6) : 2 = 60 : 2 = 30 \text{ cm}^2$$

Příklad: Vypočítej obsah a obvod trojúhelníku ABC
 $a = 4 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $v_b = 2,8 \text{ cm}$.

$$S = (b \cdot v_b) : 2 = (7 \cdot 2,8) : 2 = 19,6 : 2 = 9,8 \text{ cm}^2$$

$$o = a + b + c = 4 + 7 + 5 = 16 \text{ cm}$$

Obsah trojúhelníku je $9,8 \text{ cm}^2$ a obvod 16 cm .

Těžnice je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany.

Značení: t_a , t_b , t_c (značíme tak i délku)

Těžiště: průsečík těžnic (T)

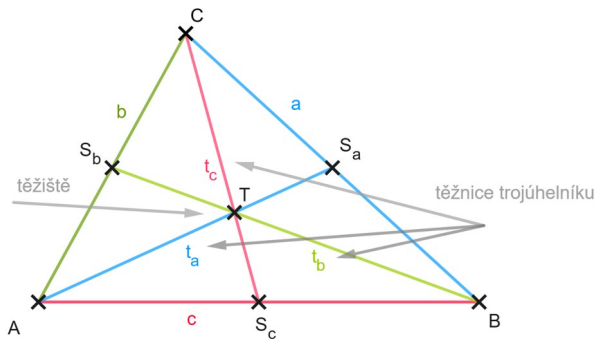
Těžiště je dvakrát dál od vrcholu, než od středu protější strany.

$|AT|$ je dvakrát delší než $|TS_a|$

$|BT|$ je dvakrát delší než $|TS_b|$

$|CT|$ je dvakrát delší než $|TS_c|$

(7. ročník poměry: T leží na těžnici v poměru 1 : 2 blíže ke středu strany)

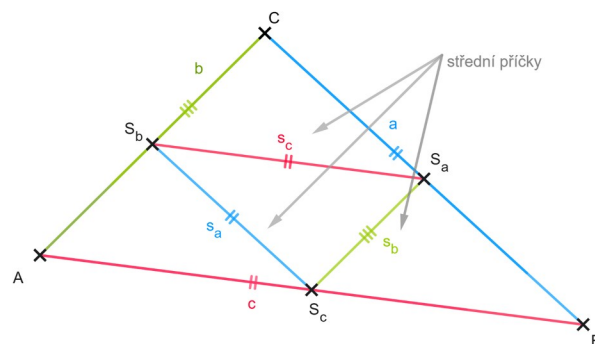


Střední příčka je úsečka spojující středy dvou stran trojúhelníku.
Je rovnoběžná se třetí stranou.

$|AB|$ je dvakrát delší než s_c

$|AC|$ je dvakrát delší než s_b

$|BC|$ je dvakrát delší než s_a

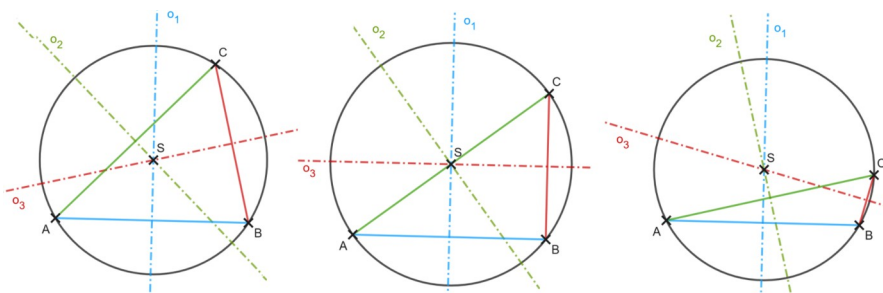
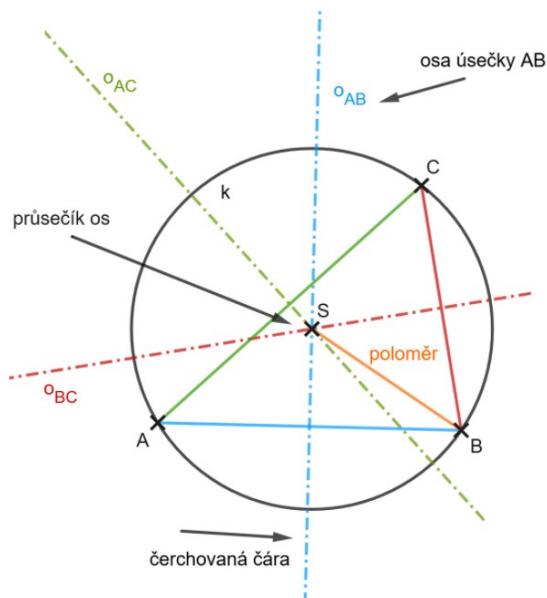


Osa úsečky AB je zároveň **osou strany v trojúhelníku**.

Průsečík os stran je zároveň **střed kružnice opsané**.

U pravoúhlého trojúhelníku leží průsečík na středu nejdelší strany.

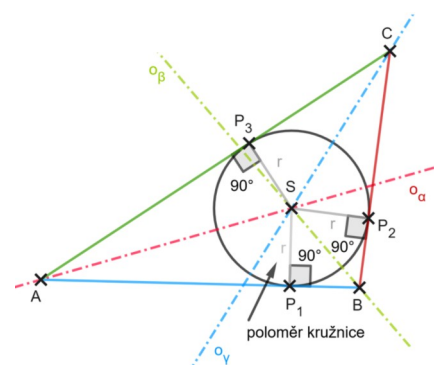
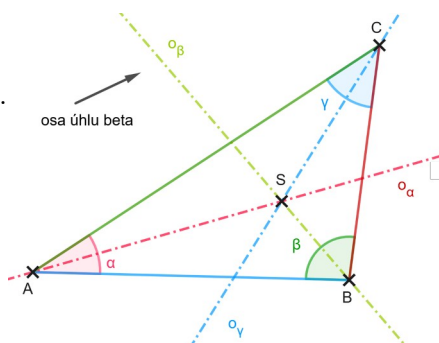
U tupohlého je mimo trojúhelník.



Osy vnitřních úhlů

Jejich průsečík je zároveň střed kružnice vepsané.

Po nalezení průsečíku sestrojíme kolmici na stranu abychom získali délku poloměru kružnice r (SP).



Rovnoramenný trojúhelník

Dvě strany (**ramena**) jsou stejně dlouhé.

Zbývající stranu nazýváme **základnou**.

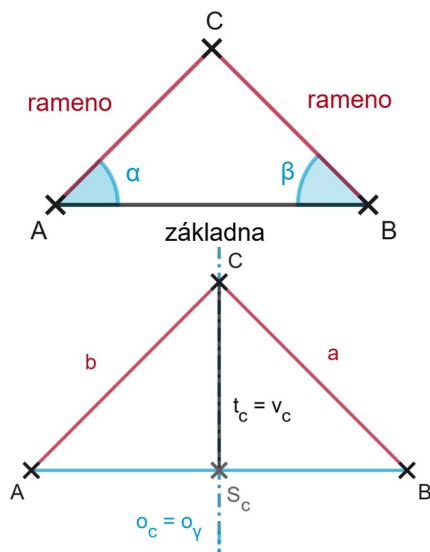
Úhly při základně se rovnají (obr. $\alpha = \beta$).

Osa základny je totožná s osou protějšího úhlu.

- Podle této osy je celý trojúhelník osově souměrný.

Výška na základnu je totožná s těžnicí.

- obě dopadají pod pravým úhlem do středu základny.



Rovnostranný trojúhelník:

Všechny strany mají stejnou velikost.

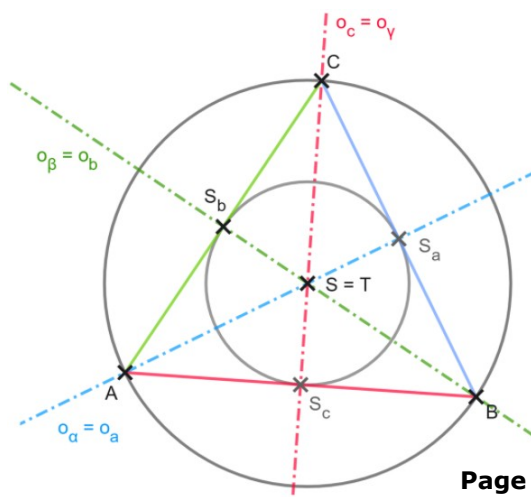
Všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost $= 60^\circ$.

Všechny osy stran jsou totožné s osami úhlů.

Všechny těžnice jsou totožné s výškami.

- Vše se protíná v jediném průsečíku ($S = T$).

- Kružnice opsaná i vepsaná má střed v těžišti.



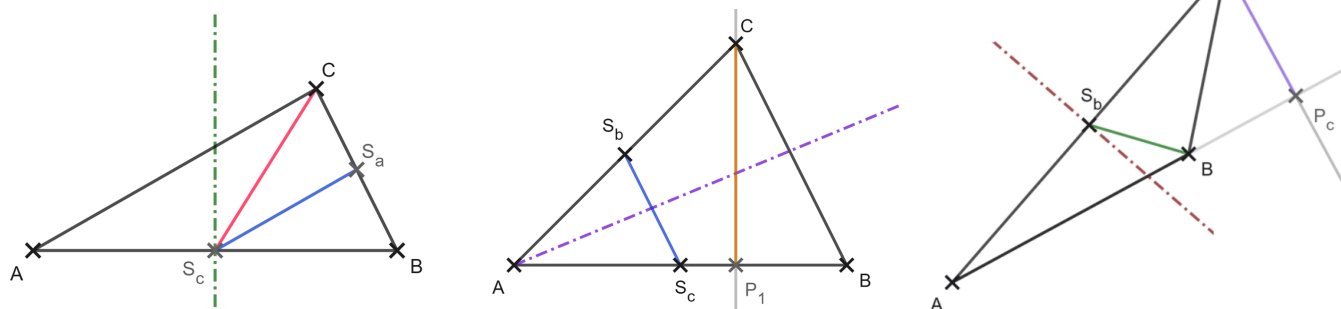
1) Rozhodni o pravdivosti tvrzení Ano/Ne.

	ANO	NE
Shodné útvary mají stejný tvar i velikost.		
Obraz bodu v osové souměrnosti je od osy stejně vzdálený jako původní bod.		
Každý trojúhelník má alespoň jednu osu souměrnosti.		
Kruh má nekonečně mnoho os souměrnosti.		
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° .		
V pravoúhlém trojúhelníku jsou všechny úhly menší než 90° .		
Tupoúhlý trojúhelník má dva tupé úhly.		
Trojúhelník lze sestavit jen tehdy, když platí trojúhelníková nerovnost.		
Ortocentrum je průsečík přímek, na kterých leží výšky trojúhelníku.		
Těžiště je průsečík os stran trojúhelníku.		
Všechny těžnice rovnostranného trojúhelníku jsou zároveň výškami.		
Osy vnitřních úhlů se protínají ve středu kružnice opsané.		

2) Dopiš značky k trojúhelníku ABC.

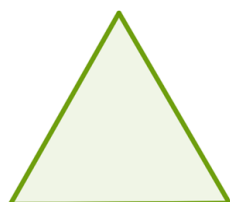
vrcholy Vzor: A, B, C
 středy stran
 úhly
 strany
 těžnice
 těžiště
 výšky
 osy stran
 osy úhlu
 střední příčky

3) Doplně značení k barevným čarám v trojúhelníku.



4) O každém rovinném útvaru rozhodni kolik má os souměrnosti.

a) rovnostranný trojúhelník



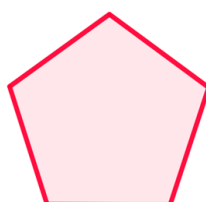
Počet os souměrnosti:

b) čtverec



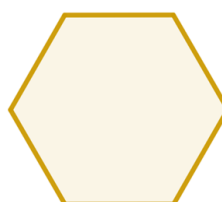
Počet os souměrnosti:

c) pravidelný pěti-úhelník



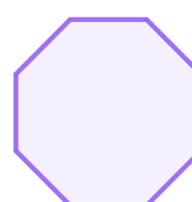
Počet os souměrnosti:

d) pravidelný šesti-úhelník



Počet os souměrnosti:

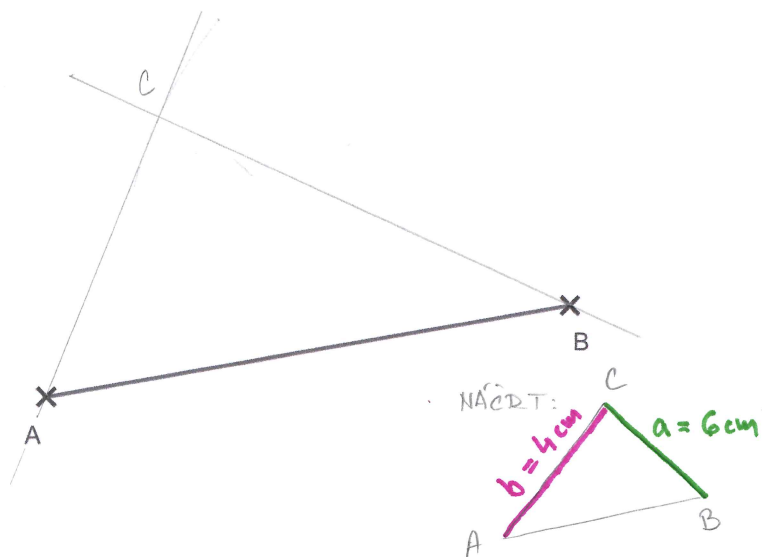
e) pravidelný osmi-úhelník



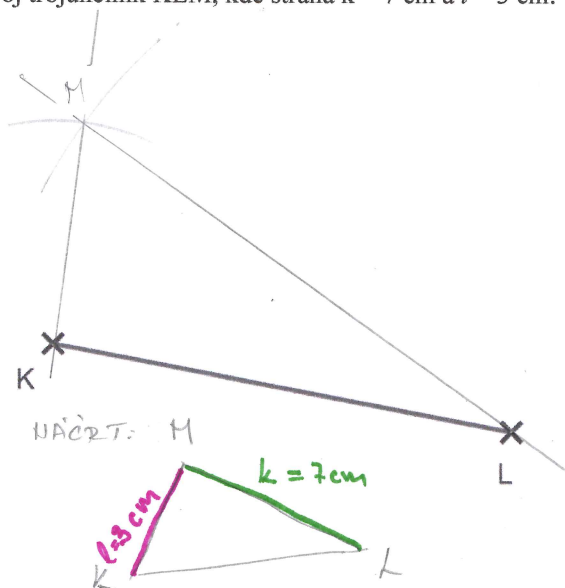
Počet os souměrnosti:

Konstrukce trojúhelníku 1

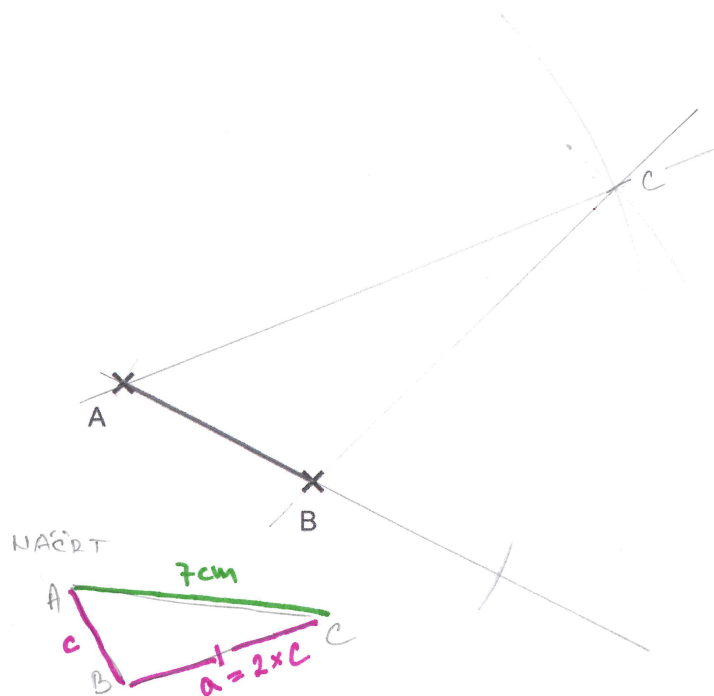
1) Sestroj trojúhelník ABC, kde strana $a = 6$ cm a $b = 4$ cm.



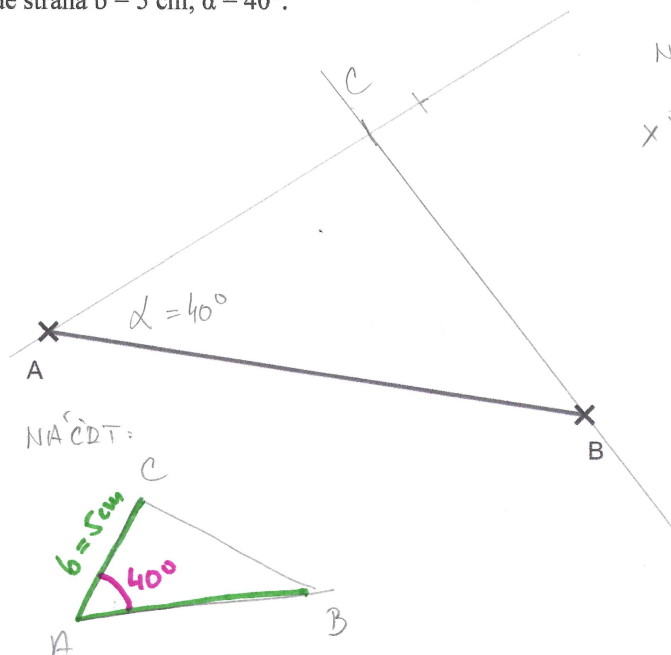
2) Sestroj trojúhelník KLM, kde strana $k = 7$ cm a $l = 3$ cm.



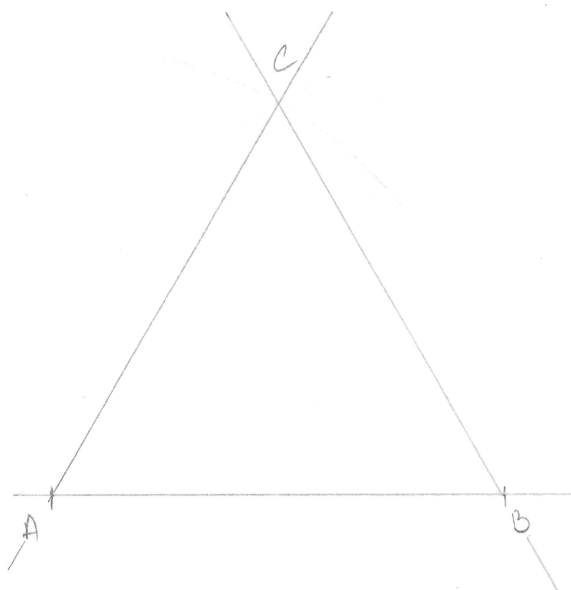
3) Sestroj trojúhelník ABC, kde strana $b = 7$ cm a strana a je dvakrát větší než strana c .



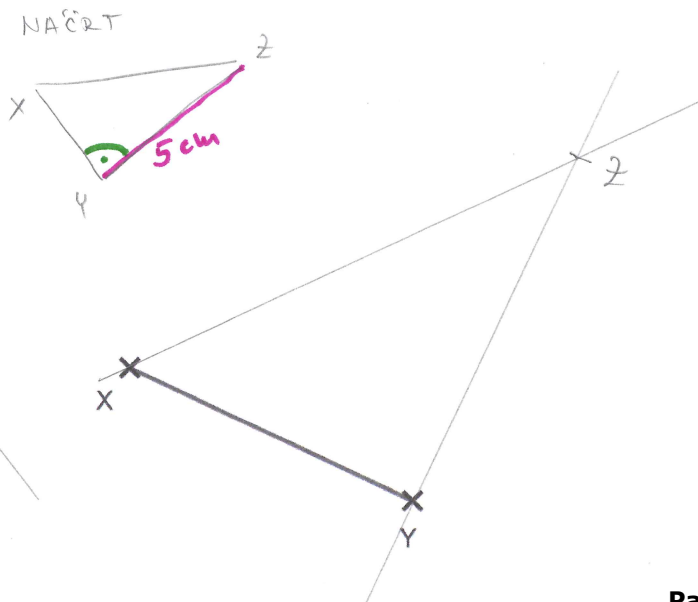
5) Sestroj trojúhelník ABC, kde strana $b = 5$ cm, $\alpha = 40^\circ$.



4) Sestroj rovnostranný trojúhelník se stranou $a = 6$ cm.



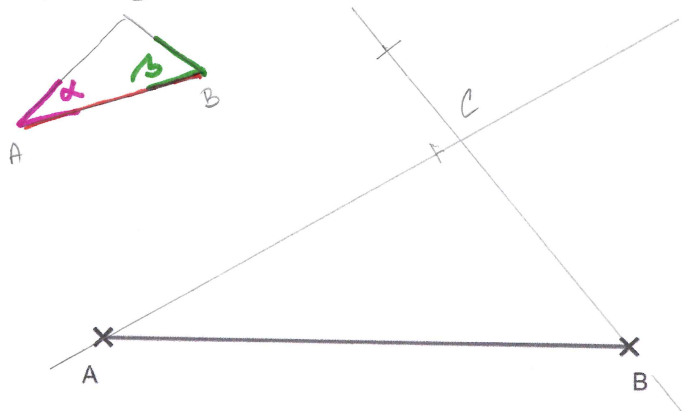
6) Sestrojte pravoúhlý trojúhelník XYZ s pravým úhlem při vrcholu Y, kde strana $x = 5$ cm.



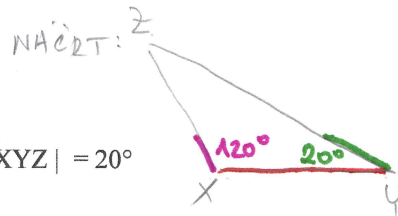
Konstrukce trojúhelníku 2

1) Sestroj trojúhelník ABC, kde úhel $\alpha = 30^\circ$ a $\beta = 50^\circ$.

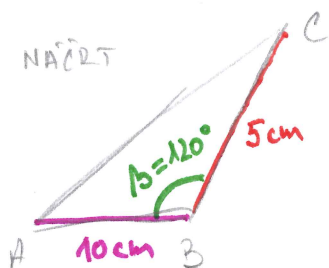
NÁČRT: C usu



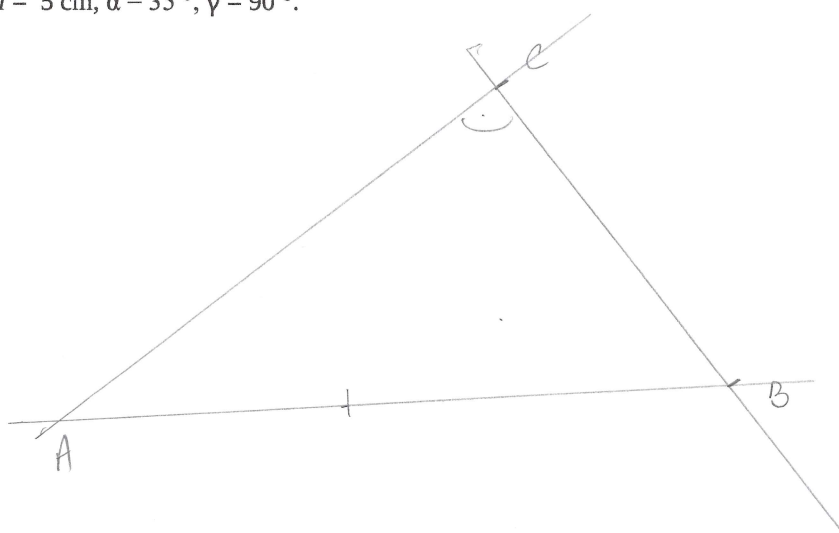
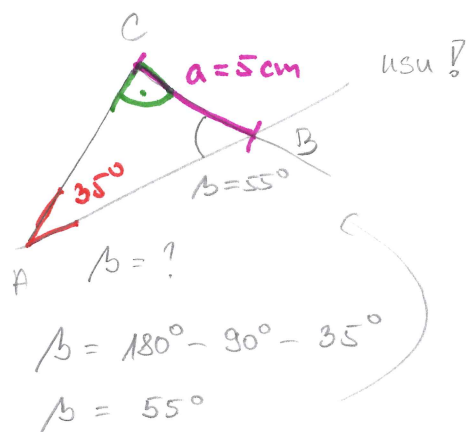
2) Sestroj trojúhelník XYZ, kde $|\sphericalangle YXZ| = 120^\circ$ a $|\sphericalangle XYZ| = 20^\circ$



3) Sestroj trojúhelník ABC podle věty sus, kde $a = 5$ cm, $c = 10$ cm, $\beta = 120^\circ$. Proveď náčrtek.

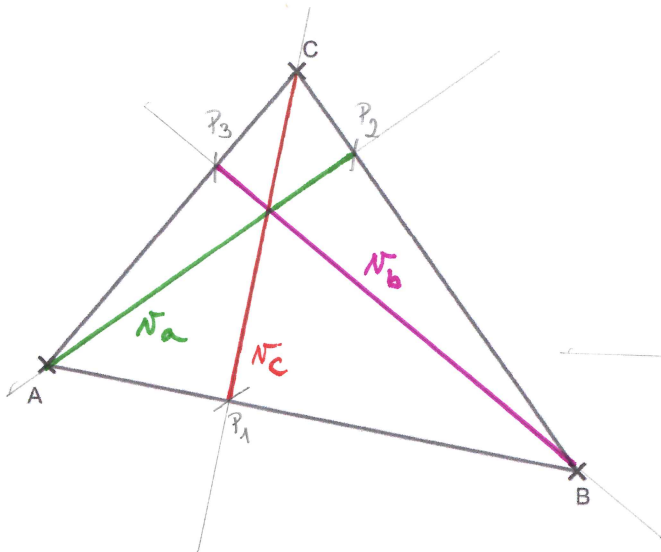


4) Sestroj trojúhelník ABC podle věty usu, kde $a = 5$ cm, $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

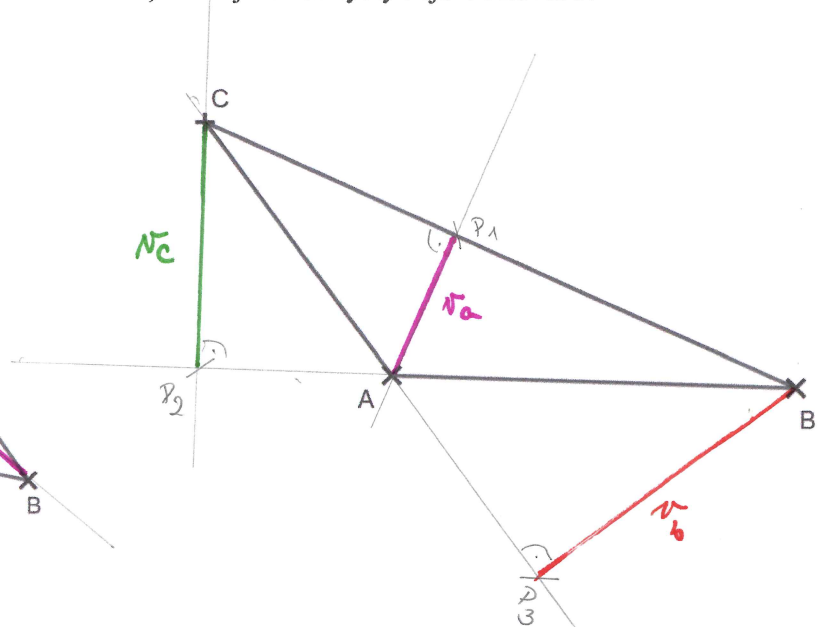


Konstrukce v trojúhelníku 1 Výšky

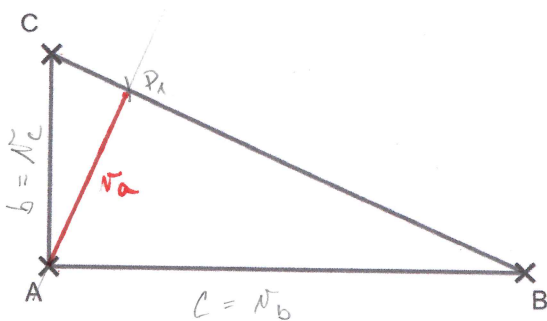
1) Sestroj a označ výšky trojúhelníku ABC.



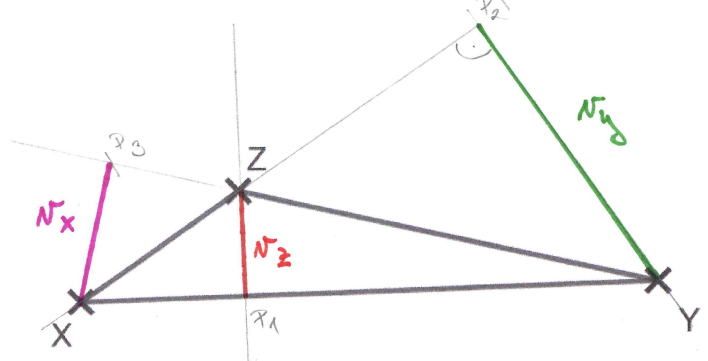
2) Sestroj a označ výšky trojúhelníku ABC.



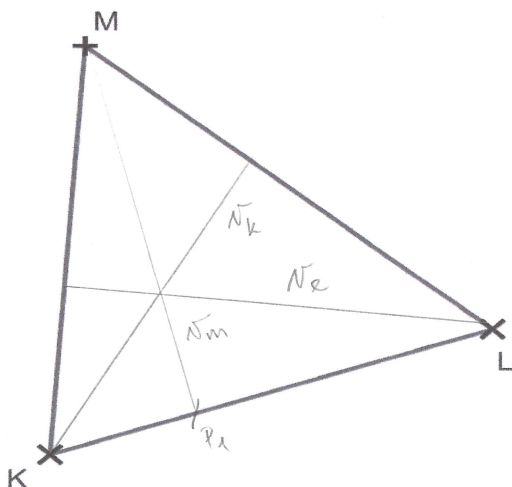
3) Sestroj a označ výšky trojúhelníku ABC.



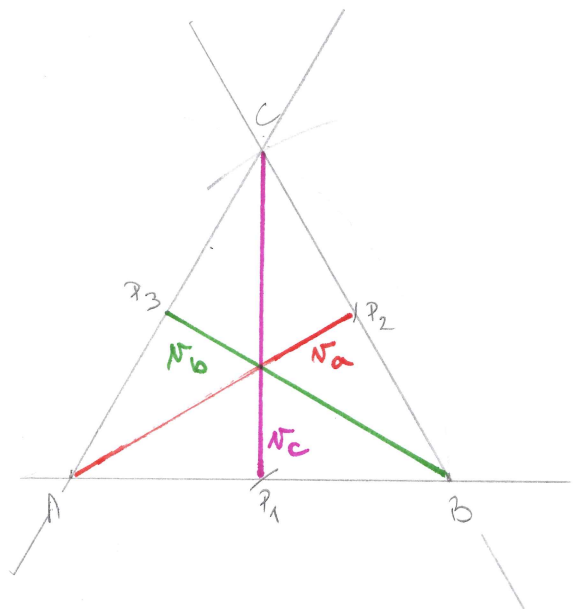
4) Sestroj a označ výšky trojúhelníku XYZ.



5) Sestroj a označ výšky trojúhelníku KLM.

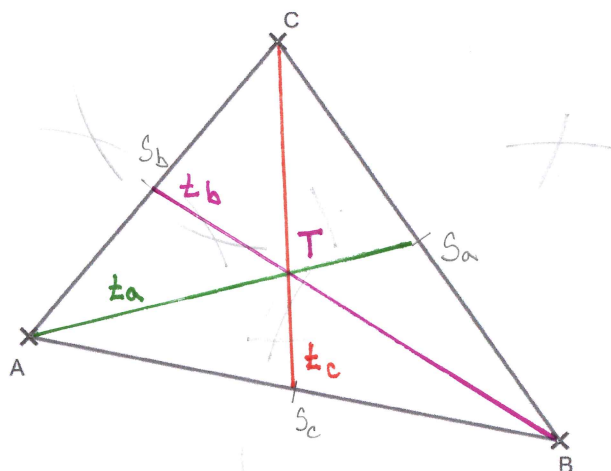


6) Sestroj rovnostranný trojúhelník ABC s délkou stran $a = 5$ cm. Sestroj výšky trojúhelníku ABC.

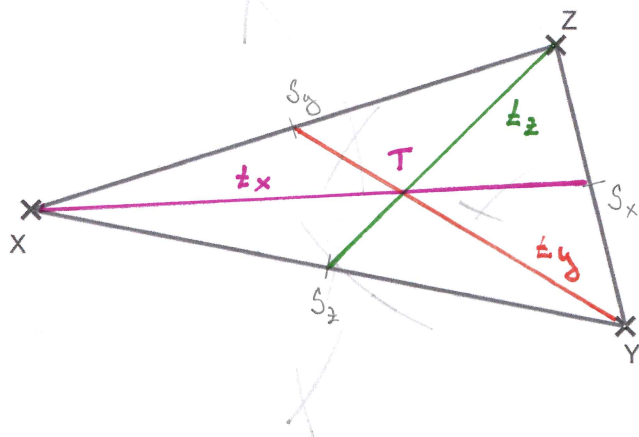


Konstrukce v trojúhelníku 2 - Těžiště a střední příčky

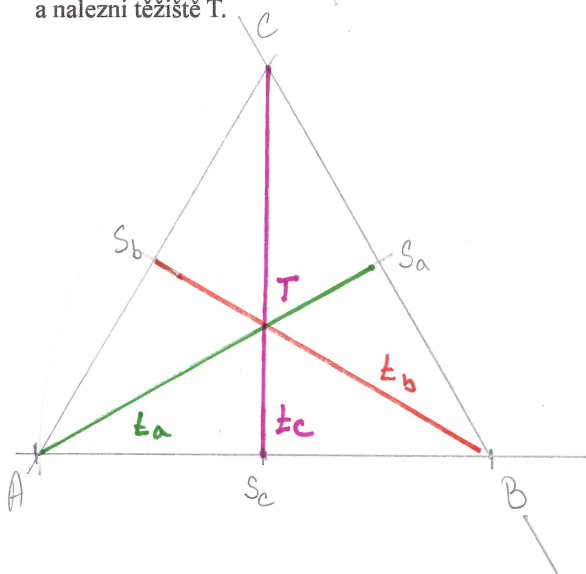
1) Sestroj a označ těžiště trojúhelníku ABC a nalezni těžiště T.



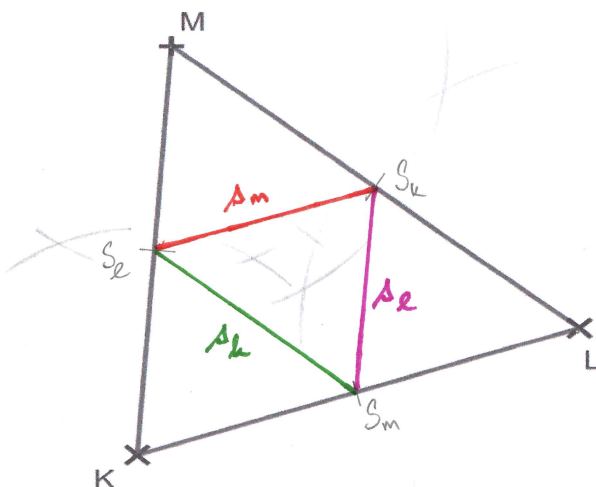
2) Sestroj a označ těžiště trojúhelníku XYZ a nalezni těžiště T.



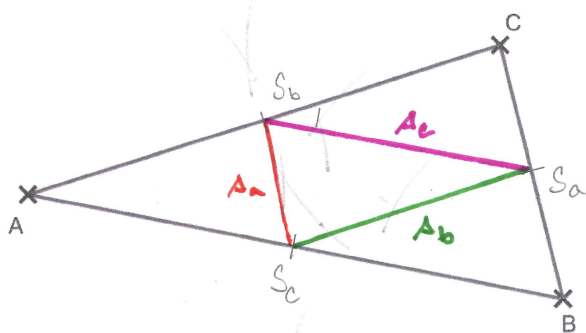
3) Sestroj rovnostranný trojúhelník ABC s délkou stran $a = 6$ cm. Sestroj těžiště trojúhelníku ABC a nalezni těžiště T.



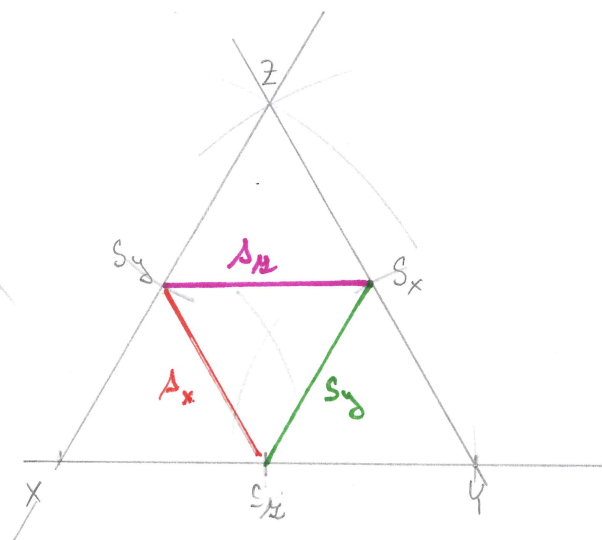
4) Sestroj střední příčky trojúhelníku KLM.



5) Sestroj střední příčky trojúhelníku ABC.

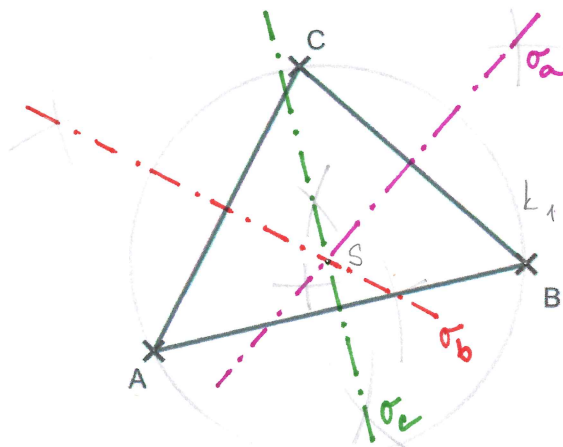


6) Sestroj rovnostranný trojúhelník XYZ s délkou stran $a = 5,5$ cm. Sestroj střední příčky trojúhelníku XYZ.

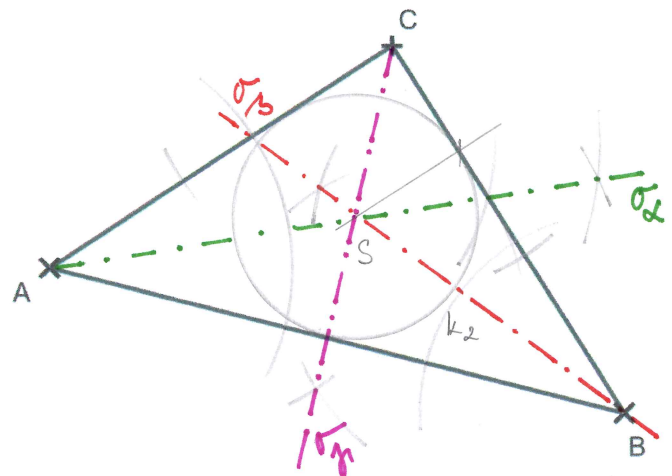


Konstrukce v trojúhelníku 3 Kružnice opsaná a vepsaná

1) Sestroj kružnici opsanou trojúhelníku ABC.



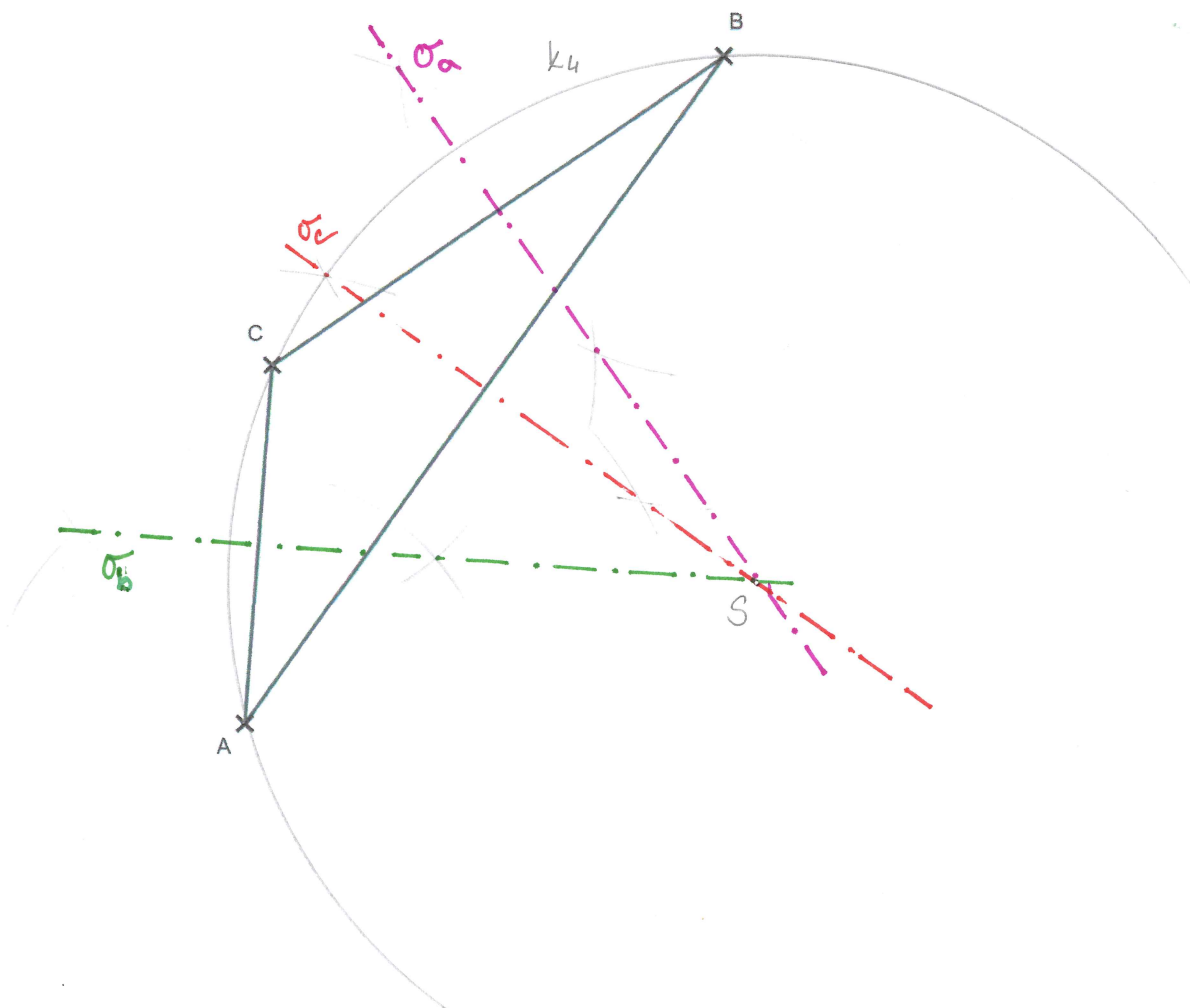
2) Sestroj kružnici vepsanou trojúhelníku ABC.



3) Sestroj kružnici vepsanou trojúhelníku ABC.

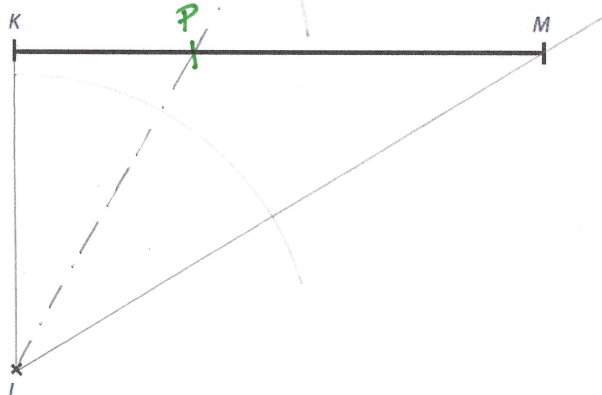


4) Sestroj kružnici opsanou trojúhelníku ABC.

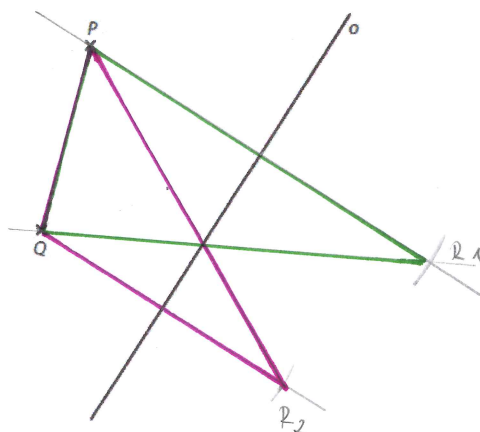


Trojúhelník v přijímacích zkouškách 1

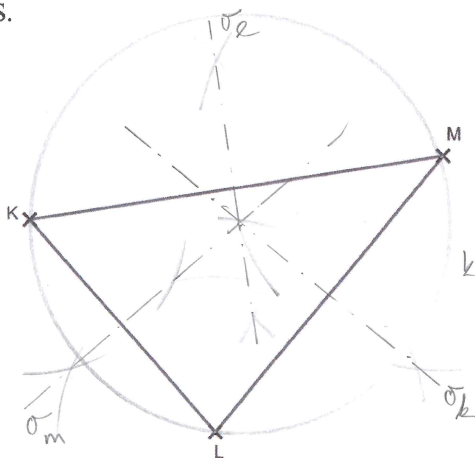
1) Na úsečce KM sestrojte takový bod P , aby úhly KLP a PLM byly shodné. Oba úhly narýsujte.



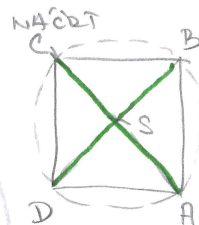
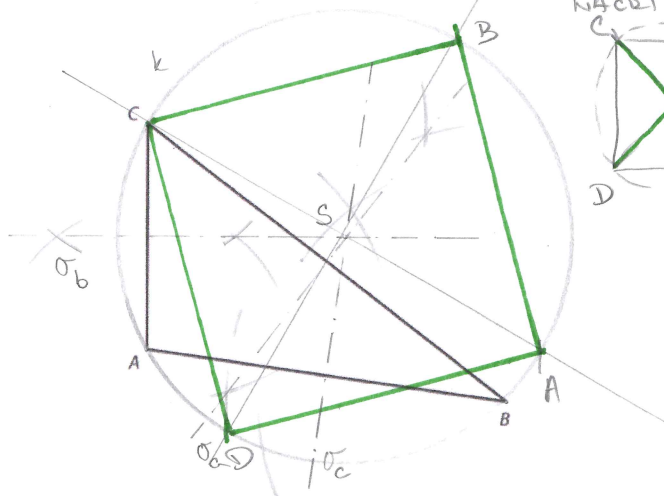
2) Body P, Q jsou vrcholy trojúhelníku PQR . Přímka o je osou některé strany tohoto trojúhelníku. Sestrojte vrchol R trojúhelníku PQR , označte ho písmenem a trojúhelník narýsujte. Najděte všechna řešení.



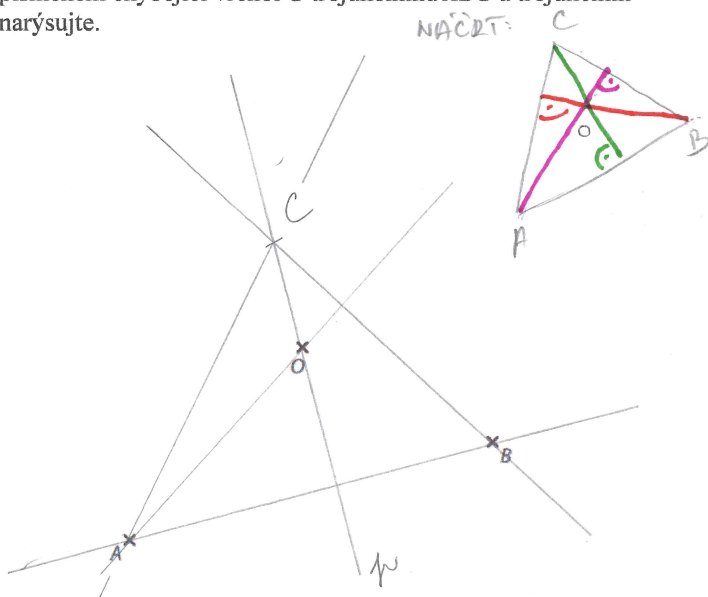
3) Sestroj kružnici k procházející vrcholy KLM . Střed kružnice označ S .



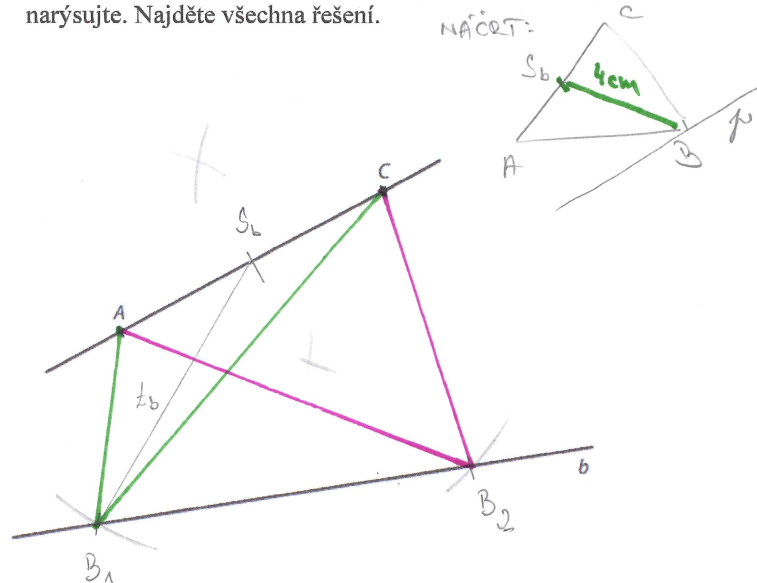
4) Všechny vrcholy trojúhelníku ABC leží na kružnici k . Bod C je vrchol čtverce $CDEF$. Zbývající vrcholy D, E, F , čtverce $CDEF$ leží na kružnici k . Sestroj kružnici k a čtverec $CDEF$.



5) Body A, B jsou vrcholy trojúhelníku ABC . Bod O je průsečík výšek tohoto trojúhelníku. Sestrojte a označte písmenem p přímkou, na níž leží výška na stranu AB . Sestrojte a označte písmenem C trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte.

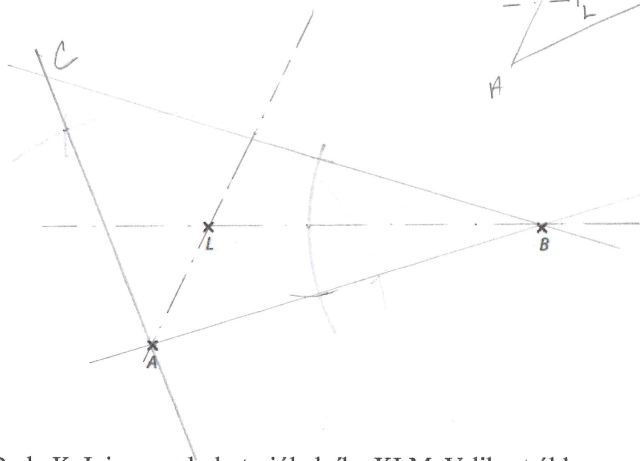
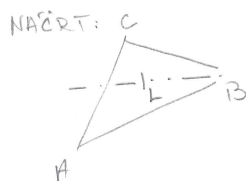


6) Body A, C jsou vrcholy trojúhelníku ABC . Na přímce b leží vrchol B . Délka těžnice t_b na stranu AC je 4 cm. Sestrojte vrchol B trojúhelníku ABC , označte jej písmenem a trojúhelník narýsujte. Najděte všechna řešení.

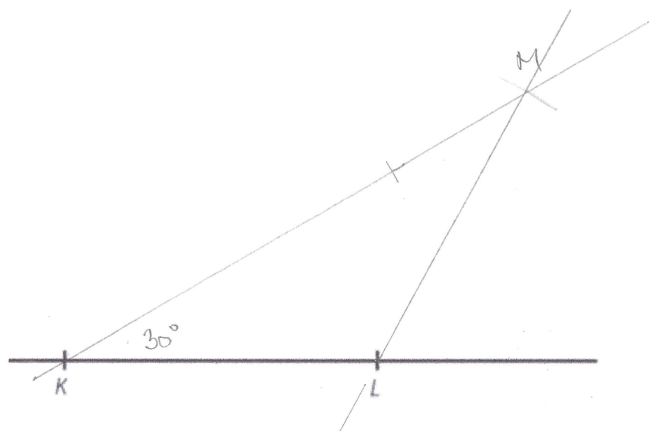


Trojúhelník v přijímacích zkouškách 2

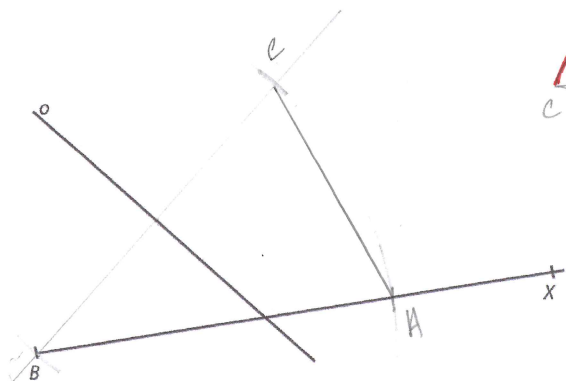
1) Body A, B jsou vrcholy trojúhelníku ABC. Osy vnitřních úhlů BAC a ABC tohoto trojúhelníku procházejí bodem L. Sestrojte vrchol C trojúhelníku ABC, označte ho písmenem a trojúhelník narýsujte.



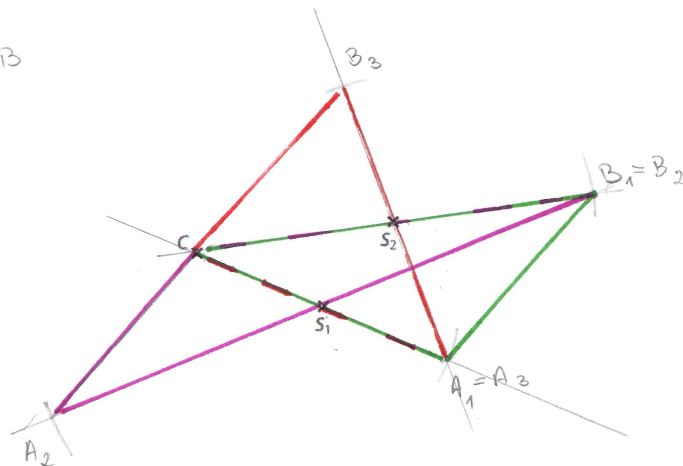
3) Body K, L jsou vrcholy trojúhelníku KLM. Velikost úhlu LKM je 30° . Vzdálenost bodu L od bodu K je stejná jako vzdálenost bodu L od bodu M. Sestroj jeden trojúhelník KLM.



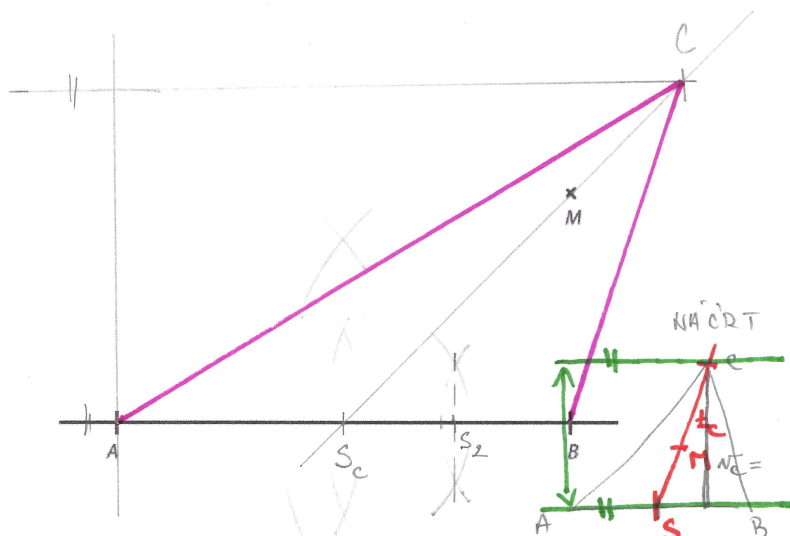
5) Bod B je vrchol rovnoramenného trojúhelníku ABC. Přímka o je osou strany BC trojúhelníku. Bod A leží na polopřímce BX. Sestroj rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AC.



2) Bod C je vrchol trojúhelníku ABC a body S₁, S₂ jsou středy dvou stran tohoto trojúhelníku. Sestrojte vrcholy A, B trojúhelníku ABC, označte je písmeny a trojúhelník narýsujte. Najděte všechna 3 řešení.



4) Úsečka AB je strana c trojúhelníku ABC. Bod M leží uvnitř tohoto trojúhelníku na těžnici t_c (těžnici na stranu c). Výška v_c (výška na stranu c) měří tři čtvrtiny délky AB. Sestroj chybějící vrchol C a najdi těžiště trojúhelníku T.



6) Bod B je vrchol trojúhelníku ABC. Přímka o je osou strany AB. Velikost vnitřního úhlu BAC je 60° a vrchol C leží na polopřímce BX. Sestrojte vrcholy A, C trojúhelníku ABC, označte je písmeny a trojúhelník narýsujte.

